Números

A las sociedades primitivas, que usaban los números solo para contar, les bastaban los números naturales 1,2,3,4,5,6, ...
Los babilonios y los egipcios usaron fracciones, que permiten dividir exactamente a cualquier número entero entre otro y permiten aproximar bien a las cantidades que no son enteras.
Los griegos descubrieron que no todas las cantidades pueden expresarse exactamente por medio de números *racionales* (fracciones) sino que existen números *irracionales*.
Los griegos no sabían de números negativas, pero en China empezaron a usarlos antes del siglo I y en la India antes del siglo IV. Para el siglo X los matemáticos árabes las usaban con soltura, y en el siglo XVI los europeos se convencieron que los números negativos no eran absurdos.
A los números que representan todas las cantidades posibles (positivas y negativas, racionales e irracionales) se les llama *números reales*. Al conjunto de los números reales se le denota por **R**.
El concepto de número se ha ido ampliando cada vez mas, y ahora se conocen otros números que no representan cantidades reales. Lo que hace que sean números es que podemos sumarlos y multiplicarlos (como los números naturales), a veces podemos restarlos (como los números enteros) y a veces también podemos dividirlos (como los números racionales). Entre mas operaciones podamos hacer con ellos mejor!

La suma y el producto de las distintas clases de números tienen propiedades comunes, y entre mas operaciones podemos hacer con ellos mas propiedades tienen.

Para los números naturales 1,2,3,4,5,5,7,... se cumplen

- *La suma es conmutativa* $r+s = s+r$
- *La suma es asociativa* $r+(s+t) = (r+s)+t$
- *La multiplicación es conmutativa* $r·s = s·r$
- *La multiplicación es asociativa* $r·(s·t) = (r·s)·t$
- *Existe un neutro multiplicativo* $1·r = r$
- *La multiplicación se distribuye con la suma* $r·(s+t) = r·s + r·t$

Para los números enteros ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,... se cumplen las propiedades anteriores y ademas:

- *Existe un neutro aditivo (el 0)* $r+0 = r$
- *Existen los inversos aditivos* $r+(-r) = 0$
  La existencia de inversos aditivos es lo que permite restar, definiendo $r-s = r + (-s)$

Para los números racionales se cumplen todas las propiedades anteriores y ademas se cumple

- *Los números distintos de 0 tienen inversos* $r·r^{-1} = 1$
  La existencia de inversos multiplicativos es lo que permite dividir, definiendo $r/s = rs^{-1}$ para $s≠0$

La suma y multiplicación de números naturales tienen significados claros que explican las propiedades conmutativas, asociativas y distributiva.
Para las fracciones positivas la suma también tiene un significado claro (si las escribimos con denominador).
El significado del producto y división de fracciones no es tan obvio, pero puede entenderse viendo como debería ser la multiplicación y división de una fracción por un entero, buscando que la multiplicación de fracciones sea asociativa y definiendo la división como la operación inversa de la multiplicación.

Extender la suma y el producto de los números positivos a los números negativos es mas truculento.
Si pensamos en los números negativos como un espejo de los números positivos, suena natural definir la suma de números negativos como el espejo de la suma en los números positivos, definiendo (-a)+(-b) = -(a+b)
Y la suma de un número positivo a y un número negativo -b puede define como

$$a + (-b) = \begin{cases} a-b & \text{si } a>b \\ -(b-a) & \text{si } b>a \end{cases}$$

Para extender el producto de números positivos a negativos hay que decidir 2 cosas: ¿de que tamaño deberían ser los productos? ¿que signo deberían tener?
Si pensamos en los números negativos como espejo de los positivos queda claro qe el producto (-a) (-b) debería tener el mismo tamaño que ab, pero con signo positivo o negativo?
Si queremos que la suma y el producto sigan teniendo la propiedades que tienen para los números positivos no tenemos elección:

$0 = a\,0 = a(b+(-b)) = ab + a(-b)$ y esto dice que $a(-b) = -(ab)$

así que el producto de un positivo por un negativo debe ser negativo

$0 = (-a)\,0 = (-a)(b+(-b)) = (-a)(b) + (-a)(-b)$ y esto dice que $(-a)(-b) = -(-a)(b) = ab$

así que el producto de dos negativos debe ser positivo.

El hecho de que la suma y producto tengan estas propiedades no implica que la resta y la división las tengan: la resta y la división no son conmutativas ni asociativas:

$4-3 \neq 3-4$ $\quad$ $(4-3)-2 \neq 4-(3-2)$ $\quad$ $4\div 3 \neq 34$ $\quad$ $(4\div 3)\div 2 \neq 4\div(3\div 2)$

Aunque la multiplicación se distribuye con la resta: $a\cdot(b-c) = a\cdot b - b\cdot c$, la división no se distribuye con la suma ni con la resta: $1/(a+b) \neq 1/a+1/b$. Y hay que tener mucho cuidado con usar "propiedades" que no son ciertas, por ejemplo $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$.

Las propiedades de la suma y la multiplicación son muy útiles para hacer operaciones con cantidades desconocidas.

$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$ *(aplicando la propiedad distributiva 2 veces)*

$(a+b)^2 = a(a+b)+b(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$ *(por distributividad y conmutatividad del producto)*

$(x-2)(x^2-3x+4) = x\,(x^2-3x+4) - 2(x^2-3x+4) = x^3-3x^2+4x - 2x^2+6x-8 = x^3-5x^2+10x-8$

(distributividad, conmutatividad del producto y de la suma)

Las propiedades de la suma y el producto se usan para resolver ecuaciones, pero hay que tener cuidado.

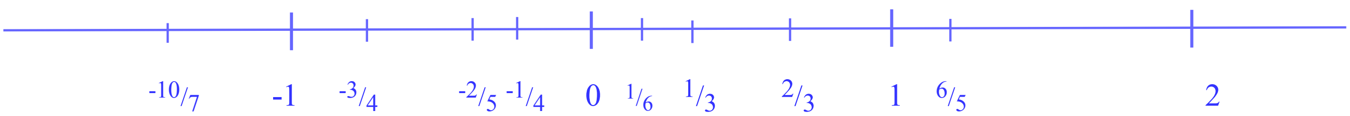
Ejemplo. ¿Que está mal en el siguiente argumento?

Sea $x=y$ entonces

$$x^2 = xy$$
$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$
$$(x+y)(x-y) = y\,(x-y)$$
$$x+y = y$$
$$2y = y$$
$$2 = 1$$

Los números reales.

Se puede demostrar que hay muchos mas números irracionales que racionales y que por lo tanto la mayoría de los números reales son irracionales.
Si en una recta elegimos dos puntos para representar a los números 0 y 1, entonces podemos representar a los enteros como los puntos a esa misma distancia en la recta, y las fracciones de la forma m/n quedan representadas por puntos de la recta que dividen a los segmentos entre enteros en n partes iguales



Todos los puntos marcados de la recta representan a los números racionales, y todos los demás puntos representan a los números irracionales.
Los griegos no tenían manera de escribir a todos los reales como números, los representaron como longitudes de segmentos y averiguaron como sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos de manera geométrica.
La suma y la resta son muy fáciles, pero la multiplicación y división son mas difíciles porque deben funcionar para todos los números, no solo los enteros o racionales (y la multiplicación debe dar una longitud, no un área)

Cada número racional puede describirse usando un par de números enteros, pero para determinar a un número real hace falta mucha mas información.
Podemos hacerlo geométricamente pensando en la recta como una regla donde están marcados los enteros y dividir estos segmentos en 10 partes iguales, los segmentos resultantes en 10 partes iguales, y estos en 10 partes (como si fueran metros, decímetros, centímetros, milímetros) y así hasta el infinito. Para localizar un punto en la recta vemos las marcas mas cercanas a la izquierda del punto, utilizando cada vez marcas mas finas. Es posible que terminemos por llegar exactamente a una marca en la regla, pero lo mas probable es que esto nunca ocurra.
Aritméticamente esto corresponde a ir aproximando al número con una suma de potencias positivas y negativas de 10, lo que puede escribirse fácilmente usando la notación decimal

Ejemplo. $3x10^3+7x10^2+4x10^1+5x10^0+3x10^{-1}+0x10^{-2}+2x10^{-3}+1x10^{-4} = 3745.3021$
La expansión decimal de un número termina si el número es una suma finita de potencias de 10, pero lo mas probable es que esto nunca suceda (aunque el número sea racional) y que el número sea una suma infinita de potencias de 10 y en este caso la expansión decimal es infinita.

Ejemplos:

- 1/4 = 0.25
- 1/32 = 0.03125
- 1/3 = 0.333333333333333333333333333333333333...
- 12/55 = 0.21818181818181818181818181818181811...
- 9/7 = 1.285714285714285714285714285714285714...
- √2 = 1.41421356237309504880168872420969807856967187...
- π = 3.14159265358979323846264338327950288419716939...

(no terminan nunca)

Cada número real tiene una sola expansión decimal, a menos que esta termine en una cola de 0´s o de 9´s, en este caso el número tiene dos expansiones distintas y mejor usamos la cola de 0´s (que no se escriben).

Ejemplos:

- 0.9999999999999999999999999999999999999..... = 1
- 12.34569999999999999999999999999999..... 0 = 12.3457

(son iguales porque la distancia entre ellos es menor que cualquier número y entre ellos no cabe ningún otro número)

El valor exacto de un número real usando está dado por su expansión decimal completa, pero darla es prácticamente imposible a menos que siga algún patrón. Para la mayoría de las aplicaciones basta con dar una buena aproximación del número, y esto es posible porque cada número real es el *limite* de una sucesión de números racionales que lo aproximan cada vez mejor.

Ejemplo $\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872420969807856967187...

puede aproximarse por la sucesión de números racionales

1
1.4
1.41
1.414
1.4142
1.41421
1.414213
1.4142135
1.41421356
1.414213562
1.4142135623
1.41421356237
. . . .

En los ejemplos anteriores se nota una diferencia entre las expansiones decimales de las fracciones y las de los números $\sqrt{2}$ y π : las de las fracciones contienen secuencias de dígitos que se repiten a partir de algún momento y esto no parece ocurrir para $\sqrt{2}$ y π (aunque podría ocurrir mas adelante en la expansión decimal)

Diremos que la expansión decimal de un número tiene *cola periódica* si contiene una secuencia de dígitos que se repite sin cesar a partir de un momento. Las expansiones que terminan tienen colas periódicas de 0´s.

Lema. Todas las fracciones tienen expansiones decimales con colas periódica, y todos números que tienen expansiones decimales con colas periódicas son fracciones.

Demostración. $\Rightarrow$ La expansión decimal de la fracción m/n se obtiene por división repetida, y los residuos en cada paso son menores que n. Si algún residuo es 0, la división termina y m/n tiene expansión decimal finita. Si las divisiones no paran, entonces (como solo hay una cantidad finita de residuos menores que n) algun residuo tiene que repetirse, y ese momento los resultados de las divisiones que habíamos hecho se repiten hasta llegar de nuevo al mismo residuo, etc.

$\Leftarrow$ Si el número a tiene una expansión decimal con una cola periódica con periodo k entonces el número $10^k a$-a tiene expansión decimal finita (porque las colas de $10^k a$ y a se cancelan después de la primera repetición) así que $10^k a$-a es una fracción m/n y por lo tanto $a=(m/n)/(10^k-1)$ también es una fracción. •

Ejemplo. El número a = 12.345454545454545454.... (se repite) es una fracción ya que

$$100a = 1234.545454545454545...$$
$$100a - a = 1222.200000000000000...$$
$$99a = {}^{12222}/_{10}$$
$$a = {}^{12222}/_{990} = {}^{2037}/_{165}$$

Recíprocamente, le expansión decimal de $^{2037}/_{165}$ se obtiene dividiendo 2037 entre 165

```
       12.34545...
165 | 2037
      165
       387
       330
        570
        495
         750
         660
          900
          825
           750
           660
            900
            825
             750
```

Una vez que los residuos se repiten todos los resultados posteriores se repiten

Operaciones con números reales.

Ya sabemos sumar y multiplicar enteros y fracciones, ¿pero como podemos sumar y multiplicar exactamente números reales? Queremos que la suma y el el producto de números reales tengan un significado acorde al que tienen para los números enteros y fracciones, y por otro lado queremos que la suma y el producto tengan las mismas propiedades que tenían antes.

Podemos tratar de sumar y multiplicar usando las expansiones decimales, pero si queremos hacerlo exactamente usando las expansiones decimales infinitas no hay donde donde empezar! (la suma y el producto de expansiones decimales finitas se hacen de derecha a izquierda por una buena razón)

Ejemplo. ¿cual será el producto de estos números? (*supongan que tuvieran las expansiones completas*)

7.21431596265003589793238462643383279502884197... x   4.8321421356237309504880168872420969807856967187...

Si vemos a los números reales como límites de sucesiones de números racionales, entonces podemos calcular las sumas y productos de reales como límites de las sumas y productos de los racionales que los aproximan. Aunque los resultados solo van a ser exactos al tomar el límite, para muchas aplicaciones no es necesario (o no es posible) tanta precisión, pero si es importante saber que tan lejos estamos de ahí. Y los errores pueden ser mayores a lo que uno esperaría.

Ejemplo. Digamos que conocemos 2 números reales con una precisión de 1 milésimo. ¿con que precisión podremos calcular su suma y su producto?

Si tomamos a=2.345... y b=6.789... entonces a+b debe estar entre 2.345+6.789 = 9.134 y 2.346+6.790 = 9.136

y axb debe estar entre 2.345x6.789 = 15.920205 y 2.346x6.790 = 15.92934

así que conocemos la suma con una precisión de 2 milésimos y el producto con una precisión de 9 milésimos

Si tomamos a=23.456... y b=67.890... entonces a+b debe estar entre 23.456+67.890 = 91.346 y 23.457+6.790 = 91.348

y axb debe estar entre 23.456x67.890 = 1592.42784 y 23.457x67.891 = 1592.519187

así que conocemos la suma con una precisión de 2 milésimos y el producto con una precisión de 1 décimo.

Veamos finalmente que tanto afectan los errores a la suma y al producto de números reales.
Digamos que conocemos aproximadamente a dos números reales positivos y sabemos que sus valores aproximados a y b difieren de sus valores exactos a' y b' (que desconocemos) en menos que una cantidad $\varepsilon>0$, es decir que

$$a-\varepsilon < a' < a+\varepsilon \quad \text{y} \quad b-\varepsilon < b' < b+\varepsilon$$

Si sumamos las desigualdades queda

$$a+b-2\varepsilon < a'+b' < a+b+2\varepsilon$$

esto dice que el error al calcular la suma es a lo mas 2 veces el error al calcular los números.
Si ahora multiplicamos las desigualdades (podemos hacerlo porque los números son positivos) obtenemos

$$(a-\varepsilon)(b-\varepsilon) < a'b' < (a+\varepsilon)(b+\varepsilon)$$ y desarrollando los productos

$$ab-\varepsilon(a+b+\varepsilon) < a'b' < ab+\varepsilon(a+b+\varepsilon)$$

esto dice que el error en el producto es como ε multiplicado por la suma de a y b, así que si a y b son grandes el error puede ser grande aunque ε sea pequeño.

Problemas

1. Calcula y simplifica
   a. $(\sqrt{2} + {}^{1}/_{\sqrt{2}})^2$
   b. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$
   c. $(x-y)^3$
   d. $(x+1+1/x)(x-1+1/x)$
   e. $(a-1)(a^3+a^2+a+1)$
   f. $(a+1)(a^3-a^2+a-1)$
   g. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+{}^{1}/_{x}}}$

2. Di para cuales valores reales de x y y se cumple
   a. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$
   b. ${}^{1}/_{x+y} = {}^{1}/_{x} + {}^{1}/_{y}$
   c. $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

3. a. ¿A que fracción corresponde el número real 6.543213213213213... (se repite)?
   b. Calcula la expansión decimal completa de la fracción 5/7 (sin usar calculadora)

4. Demuestra que la suma de dos números racionales es un número racional y que la suma de un número racional y un número irracional es irracional. Sugerencia ¿que es lo que tienes que demostrar?

5.* ¿Con que precisión hay que calcular la raíz cuadrada de un número x para que su cuadrado difiera de x en menos que 1?

El orden en **R**

¿Que significa que un número sea mayor que otro?
Si pensamos en números positivos, el mayor es el que representa una cantidad mas grande. Así que cada número positivo a es mayor que 0, lo que escribimos como $a>0$ o $0<a$. Y si a y b son positivos entonces a es mayor que b si $a-b$ es positivo (en símbolos: $a>b$ si $a-b>0$).
Por definición los números negativos son los inversos aditivos de los números positivos, diremos que los números negativos son menores que 0 y escribimos $a<0$ o $0>a$. Así que $a>0 \iff -a<0$.
¿Y como comparamos números negativos? ¿deberíamos considerar que -3 es mayor o menor que -2?
Conviene usar la misma definición para todos los números, diciendo que $a<b$ si $b-a>0$.
Así, $-3<-2$ porque $-2-(-3)=1>0$.
Si representamos a los números reales como los puntos en una recta con los positivos a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda, entonces $a>b$ si a esta a la derecha de b. Así definimos un *orden* en **R**.

El hecho de que la suma y el producto de números positivos sean números positivos da relaciones entre el orden y las operaciones + y x.

Lema. Si a,b,c son números reales entonces

1. $a<b$ o $a=b$ o $a>b$ *tricotomía*
2. si $a<b$ y $b<c \Rightarrow a<c$ *transitividad*
3. si $a<b \Rightarrow a+c < b+c$ *monotonia*
4. si $a<b$ y $c>0 \Rightarrow ac<bc$
   si $a<b$ y $c<0 \Rightarrow ac>bc$

Demostración.

1. $a-b$ debe ser positivo, negativo o 0.
2. $a<b$ significa que $b-a>0$ y $b<c$ significa que $c-b>0$.
   Como $b-a>0$ y $c-b>0$ entonces $(b-a)+(c-b) > 0$ *(porque la suma de números positivos es positiva)*
   Simplificando queda $c-a>0$ y esto significa que $c>a$.
3. $a<b$ significa que $b-a>0$ así que $b+c-(a+c)>0$ lo que significa que $b+c>a+c$
4. $a<b$ significa que $b-a>0$
   Si $b-a>0$ y $c>0$ entonces $(b-a)c>0$ *(porque el producto de números positivos es positivo)*
   Así que $bc-ac>0$ lo que significa que $bc>ac$.
   Si $b-a>0$ y $c<0$ entonces $-c>0$ y $(b-a)(-c)>0$ *(porque el producto de números positivos es positivo)*
   Así que $-bc+ac>0$ o sea $ac-bc>0$ lo que significa que $ac>bc$

Ejercicio. ¿Será cierto que si $a<b$ entonces $a^2<b^2$?

Respuesta:
Si a y b son positivos si: Si $a<b$ y $a>0$ multiplicando por a queda $aa<ab$
Si $a<b$ y $b>0$ multiplicando por b queda $ab<bb$
y por transitividad $aa<ab<bb$
Si a y b son negativos la desigualdad se invierte.
Si a es negativo y b es positivo no se puede decir

Ejercicio. ¿Será cierto que si $a<b$ entonces $^1/_b < ^1/_a$?

Respuesta:
Sólo si a y b tienen el mismo signo:
Si $a<b$ y $ab>0$ entonces $1/ab>0$, así que $1/ab\ a < 1/ab\ b$ por lo tanto $1/b < 1/a$.
Si a y b tienen distinto signo la desigualdad es al reves
Si $a<b$ y $ab<0$ entonces $1/ab<0$, así que $1/ab\ a > 1/ab\ b$ por lo tanto $1/b > 1/a$.

Ejercicio. ¿Para cuales números reales se cumplirán las siguientes desigualdades?

a. $x < 2x$
b. $2x < 5 - 4x$

Respuestas:

a. $x>0$ (si $x<2x$ entonces sumando $-x$ queda $0<x$, y si $0<x$ entonces sumando x queda $x<2x$)
b. $x<5/6$ (sumando $4x$ queda $6x<5$ y dividiendo entre 6 queda $x<5/6$)

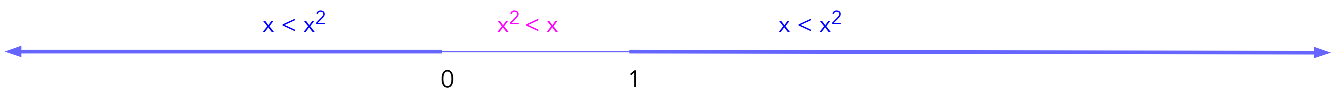
Ejemplo. ¿Cuales números reales cumplen que $x < x^2$?

Si $x < x^2$ restando x queda $0 < x^2-x$ y como $x^2-x = x(x-1)$ queda $0 < x(x-1)$.

Como el producto de dos números es positivo cuando tienen el mismo signo, hay dos alternativas:

$0 < x$ y $0 < x-1$ que equivale a $x>0$ y $x>1$ y las dos condiciones se cumplen cuando $x>1$

$0 > x$ y $0 > x-1$ que equivale a $x<0$ y $x<1$ y las dos condiciones se cumplen cuando $x<0$

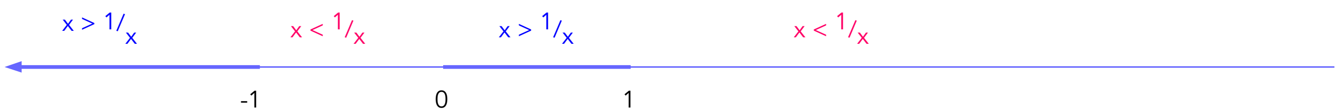


Ejemplo. ¿Cuales números reales cumplen $x > {}^1/_x$?

Consideremos dos casos:

Si $x>0$ y $x < {}^1/_x$ multiplicando por x queda $x^2 < 1$ lo que ocurre si $-1<x<1$ y como $x>0$ entonces $0 < x < 1$

Si $x<0$ y $x < {}^1/_x$ multiplicando por x queda $x^2 > 1$ lo que ocurre si $x<-1$ o si $x>1$ y como $x<0$ entonces $x < -1$



Problemas.

6. Demuestra que si $a>b$ y $c<d$ entonces $a-c < b-d$

7. ¿Es cierto que si $a<b$ y $c<d$ entonces $ac < bd$? Demuéstralo o da un contraejemplo.

8. Si $a^2 < b^2$ ¿que puedes decir de a y b?

9.* Demuestra que si $a,b>0$ entonces $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$ (la desigualdad geométrica-aritmética)

10. Encuentra todos los números reales que cumplen
    a. $4x-3 \leq 2x+1$
    b. $x^2 > 4x$
    c. $x < -1/x$
    d. $8x \geq x^3$

11. Demuestra que si $x>0$ entonces $x+1/x > 1$

12. Muestra que todos los números reales excepto uno satisfacen $x^2 + 2x > -1$
    ¿Cuales números reales satisfacen $x^2 + 2x > 0$?

El valor absoluto

Otra forma de comparar números reales es fijarse en su tamaño, sin tomar en cuenta el signo.
El **valor absoluto** de un número real x es

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de x mide la distancia que hay de 0 a x sin fijarse en la dirección.

Ejemplos

$|\sqrt{2}\,| = \sqrt{2}$
$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
$|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$
$|1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$

Ejercicio. ¿Es cierto o no es cierto?

$|-a| = a$
$a \leq |a|$
$|ab| = |a||b|$
$|a+b| = |a|+|b|$

Respuestas:
No. $|-a| = a$ solo si $a\geq 0$
Si. $a \leq |a|$ ya que si $a>0$ entonces $a=|a|$ y si $a<0$ entonces $a<-a=|a|$
Si. $|ab| = |a||b|$ ya que es cierto cuando $a,b>0$ y los valores absolutos no cambian al cambiar los signos
No. $|a+b|$ a veces es igual a $|a|+|b|$ y a veces no, por ejemplo

$|3+4| = 7 = 3+4 = |3|+|4|$
$|(-3)+(-4)| = |-7| =7=3+4=|-3|+|-4|$
$|3+(-4)| = |1| \neq 7 = 3+4 = |3|+|-4|$

Teorema. Si a y b son dos números reales entonces $|a+b| \leq |a| + |b|$

Demostración. Por casos:
Si $a,b\geq 0$ entonces $|a+b| = a+b = |a|+|b|$
Si $a,b\leq 0$ entonces $a+b\leq 0$ así que $|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|$
Si $a\geq 0$, $b<0$ debemos mostrar que $|a+b| \leq |a|+|b| = a-b$
Hay dos subcasos:
si $a+b\geq 0$ entonces $|a+b| = a+b$ y hay que ver que $a+b \leq a-b$ que equivale a $b\leq -b$ pero esto pasa porque b es negativo
si $a+b<0$ entonces $|a+b| = -(a+b)$ y hay que ver que $-(a+b) \leq a-b$ que equivale $-a\leq a$, que es cierto porque a es positivo
Si $a<0$, $b\geq 0$ la demostración es igual cambiando los papeles de a y b. •

Así que $|a+b| = |a| + |b|$ cuando a y b tienen signos iguales y $|a+b| < |a| + |b|$ cuando tienen signos distintos.

Ejemplo. $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ ya que $a-c = (a-b)+(b-c)$

Otra manera de demostrar la desigualdad $|a+b| \leq |a| + |b|$ es recordar que para $x,y\geq 0$, $x\leq y$ si y solo si $x^2 \leq y^2$.
Como $(|a+b|)^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leq a^2+|2ab|+b^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2 = (|a|+|b|)^2$
entonces $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Ejercicio. ¿cuales números reales lo cumplen?

a. $|x|=3$
b. $|2x|<1$
c. $|3x|\geq|4x|$
d. $|x+1|=|x|+1$
e. $|x+1|<|x|+1$

Respuestas:
a. $x= 3$ y $x=-3$
b. $-^1/_2 < x < {}^1/_2$
c. $x=0$ $|3x|=3|x|\leq 4|x|=|4x|$ así que $|3x|=|4x|$ así que $|x|=0$
d. $x \geq 0$ (la igualdad se cumple cuando x y 1 tienen el mismo signo)
e. $x < 0$ (la igualdad se cumple cuando x y 1 tienen distinto signo)

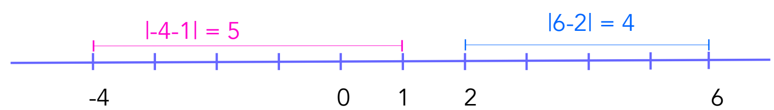
¿Que relación habrá entre $|a-b|$, $|a|$ y $|b|$?
¿ $|a-b| \leq |a|-|b|$? ¿ $|a-b| \leq ||a|-|b||$? Hagan ejemplos para ver que no!

Lema. $|a-b| \geq ||a| - |b||$

Demostración. Sale usando la desigualdad para la suma.
$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ y restando $|b|$ de ambos lados queda $|a| - |b| \leq |a-b|$
$|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a|$ y restando $|a|$ de ambos lados queda $|b| - |a| \leq |b-a|$
Como $||a| - |b||$ es igual a $|a| - |b|$ o a $|b| - |a|$ y además $|b-a| = |a-b|$ entonces $||a| - |b|| \leq |a-b|$

$|a-b|$ mide la distancia entre a y b como puntos de la recta real, sin importar el orden o los signos:

Ejemplos.
La distancia entre 2 y 6 es $|2-6|=4$
La distancia entre 1 y -4 es $|1-(-4)|=5$



Ejercicio. ¿cuales números reales cumplen...

a. $|x-1| = 3$?
b. $|x+2| = 1$?
c. $|x-2| = |x-5|$?
d. $|x-4| > 2$?
e. $|x-4| \leq |x-1|$?

Respuestas:
a. $x=2$ o $x=-4$ (los puntos a distancia 3 de 1)
b. $x=-3$ o $x=-1$ (los puntos a distancia 1 de -2)
c. $x={}^7/_2$ (los puntos a la misma distancia de 2 y 5)
d- $x<2$ o $x>6$ (los puntos cuya distancia a 4 es mayor que 2)
e. $x\geq {}^5/_2$ (los puntos que están mas cerca de 4 que de 1)

Ejemplo. ¿Cuales números reales satisfacen $|x-2|+|x+1| = 5$?
Son los puntos cuyas distancias a 2 y a -1 suman 5. Podemos hacerlo geométricamente, pero hagamoslo de manera algebraica, considerando los distintos casos: $x-2$ y $x+1$ cambian de signo cuando $x=-1$ o $x=2$.
Si $x\geq 2$ entonces $x-2\geq 0$ y $x+1>0$ y la ecuación es $(x-2)+(x+1) = 5$ o sea $2x-1=5$ o sea $x=3$
Si $x\leq -1$ entonces $x+1\leq 0$ y $x-2<0$ y la ecuación es $-(x-2)-(x+1) = 5$ o sea $-2x+1=5$ o sea $x=-2$
Si $-1\leq x\leq 2$ entonces $x+1\geq 0$ y $x-2\leq 0$ y y la ecuación es $-(x-2)+(x+1) = 5$ o sea $3=5$, así que en este caso no hay solución.

Ejercicios.

13. Calcula el valor absoluto
   a. $|{}^{7}/_{5}-{}^{10}/_{7}|$
   b. $|x-{}^{1}/_{x}|$

14. Encuentra todos los números reales que satisfacen la condición dada y dibújalos en la recta real
   a. $|x-3| = 5$
   b. $|x+4| < 3$
   c. $|x-2| \geq |x+1|$
   d. $|3x-2| = 1$
   e. $|1/x| < 2$
   f. $|x-1| = |x|+1$

15. ¿Cuales números reales cumplen estas ecuaciones?
   a. $|x-1|+|x-3| = 2$
   b. $|x-1|-|x-3| = 2$ *piensen antes de ponerse a calcular*

16. Demuestra que $x^2<y^2$ si y solo si $|x|<|y|$

17. ¿Cuales números reales satisfacen $|x-y| < |x^2-y^2|$? (en otras palabras: ¿uales números reales están mas cerca que sus cuadrados?)

18.

19.

Cotas superiores e inferiores

Si A es un conjunto de números reales, una **cota superior** para A es un número mayor o igual a todos los elementos de A. Una **cota inferior** para A es un número menor o igual a todos los elementos de A.
Si un conjunto A tiene cotas superiores (o inferiores) decimos que A esta acotado superiormente (o inferiormente)

Observar que si s es una cota superior para A entonces cualquier número mayor que s también es una cota superior para A, y si r es una cota inferior para A, entonces cualquier número menor que r también es una cota inferior para A

Ejemplos.

Si A = $\{^{10}/_{7}, 1.1, \sqrt{2}, ^{\pi}/_{3}\}$ entonces $^{10}/_{7}$, $2.\sqrt{5}$, 8 y 1000 son cotas superiores para A (porque el número mas grande en A es $^{10}/_{7}$) mientras que $^{\pi}/_{3}$, 0, $-^{1}/_{2}$ y -347 son cotas inferiores para A (porque el número mas chico en A es $^{\pi}/_{3}$). .

Si B = $\{ m \,/\, m \in \mathbf{N}\}$ entonces 1 es una cota inferior para B, pero B no tiene cotas superiores (los números naturales son mayores o iguales que 1, pero ningún número es mayor o igual que todos los números naturales.

Si C= $\{ ^{1}/_{n} \,/\, n \in \mathbf{N}\}$ entonces 1 es una cota superior para B y 0 es una cota inferior (ya que todos los inversos de números naturales están entre 0 y 1).

Si D = $\{ ^{m}/_{n} \,/\, m,n \in \mathbf{N} , 2n<m<3n\}$ entonces una cota inferior de D es 2 y una cota superior es 3 (las fracciones positivas cuyo numerador esta entre el doble y el triple del denominador son mayores o iguales a 2 y menores o iguales a 3).

Si E = $\{ ^{2n+3}/_{3n+4} \,/\, n \in \mathbf{Z} \} = \{\ldots, ^{11}/_{17}, ^{9}/_{14}, ^{7}/_{11}, ^{5}/_{8}, ^{3}/_{5}, ^{1}/_{2}, -^{1}/_{1}, ^{3}/_{4}, ^{5}/_{7}, ^{7}/_{10}, ^{9}/_{13}, ^{11}/_{16}, \ldots\}$
una cota inferior de D es -1 y una cota superior es 1 (pero hay mejores cotas superiores)

Si E = $\{ ^{2n+3}/_{3n+5} \,/\, n \in \mathbf{Z} \} = \{\ldots, ^{11}/_{18}, ^{9}/_{15}, ^{7}/_{12}, ^{5}/_{9}, ^{3}/_{4}, ^{1}/_{1}, -^{1}/_{2}, ^{3}/_{5}, ^{5}/_{8}, ^{7}/_{11}, ^{9}/_{14}, ^{11}/_{17}, \ldots\}$
una cota inferior de D es -1 y una cota superior es 1 (pero hay mejores cotas superiores)

Si F = $\{ r \in \mathbf{Q} \,/\, r^2 \leq 3 \}$ entonces F está acotado superiormente por 2 (porque $2^2>3$). Esta es la mejor cota superior entera para F (porque $1^2<3$) pero hay mejores cotas superiores racionales como $^{9}/_{5}$ (porque $(^{9}/_{5})^2=3.24>3$) o $^{87}/_{50}$ (porque $(^{87}/_{50})^2 =3.0276>3$) o $^{1733}/_{1000}$ (porque $(^{1733}/_{1000})^2=3.003289>3$). F está acotado inferiormente por los negativos de estos números.

Si G = $\{ x^2+x \,/\, x \in \mathbf{R} \}$ entonces G no está acotado superiormente (porque si x es muy grande x^2+x es todavía mas grande) pero sí esta acotado inferiormente (si $x<-1$ entonces x^2+x es positivo, y si $-1<x<0$ entonces x^2+x es mayor que -1), así que -1 es una cota inferior para G. Pero 0 no es una cota inferior para G porque $(-^{1}/_{2})^2+(-^{1}/_{2})= -^{1}/_{4}$.

Si H = $\{ x \in \mathbf{R} \,/\, x^2+x<10 \}$ entonces H está acotado superiormente y también inferiormente, ya que si $x\geq 3$ entonces $x^2+x\geq 3^2+3=11$ y si $x\leq -4$ entonces $x+1\leq -3$ y $x^2+x=x(x-1)\geq(-4)(-3)=12$.

Para los conjuntos acotados superiormente o inferiormente podemos preguntarnos si hay cotas que sean óptimas.

Una **cota superior mínima** para A es una que es menor o igual todas las cotas superiores para A.
En caso de existir la llamamos el **supremo** de A y la denotamos por sup A.

Una **cota inferior máxima** para A es una que es mayor o igual a todas las cotas inferior para A.
En caso de existir la llamamos el **ínfimo** de A y la denotamos por inf A.

Ejemplos. (mismos conjuntos de antes)
Si $A = \{^{10}/_7, 1.1, \sqrt{2}, ^{\pi}/_3\}$ entonces Sup $A = ^{10}/_7$ Inf $A = ^{\pi}/_3$ (e elementos ma grande y el mas chico del conjunto)

Si $C = \{^1/_n \ / \ n \in \mathbf{N}\}$ entonces Sup C =1 porque 1 es elementos mas grande del conjunto. Inf C=0 (aunque no hay un elemento mínimo en C, todos los elementos de C son mayores a 0 y hay elementos arbitrariamente cercanos a 0).

¿Cuales conjuntos de números tendrán supremos o ínfimos? Si no tienen cotas no pueden tener cotas optimas, así que necesitamos pedir que estén acotados. Y necesitamos que no sean vacíos porque cualquier número es cota superior (e inferior) del conjunto vacío.

Un conjunto acotado de números enteros debe ser finito, su supremo es el número mas grande entre ellos.
Pero un conjunto acotado de números racionales no tiene que tener un supremo racional:

Ejemplo.
$I = \{ ^m/_n \ / \ (^m/_n)^2 \le 2 \}$ tiene muchas cotas superiores racionales, pero ninguna de ellas es menor que todas las otras, porque $\sqrt{2}$ no es racional y cualquier cota racional $^r/_s$ debe ser mayor que $\sqrt{2}$ (ya que si fuera menor que $\sqrt{2}$ habría otro racional $^{r'}/_{s'}$ mayor que $^r/_s$ y menor que $\sqrt{2}$, así que $^{r'}/_{s'}$ estaría en J y $^r/_s$ no sería cota superior de J).
Y si $^r/_s$ es mayor que $\sqrt{2}$, entonces hay otro racional $^{r'}/_{s'}$ mayor que $\sqrt{2}$ y menor que $^r/_s$, por lo que $^{r'}/_{s'}$ sería otra cota superior menor que $^r/_s$.
Pero I si tiene una cota superior mínima: sup I = $\sqrt{2}$ que no es racional.

Principio del supremo: Cada conjunto no vacío de números reales que está está acotado superiormente tiene un supremo.

El principio del supremo es el que asegura que los reales no tienen huecos, y es el que distingue a los reales de los racionales y de muchos otros conjuntos de números que contienen a **Q** y están contenidos en **R** (como los números algebraicos, que son las soluciones de todas las ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros)

Ejemplos.
Si $E = \{ ^{2n+3}/_{3n+4} \ / \ n \in \mathbf{Z} \}$ entonces Sup $E = ^1/_1$, Inf $E = -^1/_2$

$G = \{ x^2+x \ / \ x \in \mathbf{R} \}$ Sup G no existe porque G no esta acotado superiormente.
Inf G si existe porque G está acotado inferiormente.Una cota inferior para G es -1, así que inf G≥-1.
Para hallar una mejor cota observemos que
$x^2+x = x^2+x+^1/_4-^1/_4 = (x+^1/_2)^2 - ^1/_4$
Como $(x+^1/_2)^2 \ge 0$ entonces $(x+^1/_2)^2 - ^1/_4 \ge -^1/_4$ y como $(0+^1/_2)^2 - ^1/_4 = -^1/_4$ entonces Inf $G = -^1/_4$

H = { x ∈ **R** / x^2+x<10} es acotado y no es vacío, así que debe tener un supremo y un ínfimo. El supremo de H debe estar entre 2.7 y 2.71 (porque $(2.7)^2+(2.7)=9.99<10$ y $(2.71)^2+(2.71)=10.0541>10$ y para cualquier x>2.71, $x^2+x>10$) y el ínfimo de H debe estar entre -3.71 y - 3.7 (porque $(-3.7)^2+(3.7)=9.99<10$ y $(-3.71)^2+(-3.71)=10.0541>10$) y cualquier x menor que -2.71, $x^2+x>10$) .
El supremo de H debe ser el mayor numero real s tal que $s^2+s=10$ y el ínfimo debe ser el menor numero real i tal que $i^2+i=10$.

Si los números reales están representados fielmente por sus expansiones decimales, entonces podemos convencernos de la validez del principio del supremo:

> Supongamos que A es un conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente.
> Fijémonos primero en las partes enteras de los elementos de A. Como las partes enteras están acotadas, una de ellas debe ser mayor o igual que todas las demás. Si hay un solo numero en A con parte entera máxima ese debe ser el mayor que todos los elementos de A y debe ser el supremo.
> Si hay mas de un número en en A con parte entera máxima, podemos fijarnos en los que tienen el primer decimal mas grande. Si hay un solo número con ese decimal mas grande ese debe ser el mayor de los elementos de A, si no entre ellos podemos fijarnos en los que tengan el segundo decimal mas grande, si hay uno solo ese debe ser el número mas grande en A, si no nos fijamos en los que tienen el tercer decimal mas grande. Así vamos construyendo la expansión decimal de un número x que es mayor o igual que todos los elementos de A (aunque nos puede quedar una cola de 9´s). Y no puede haber un numero menor que x que sea mayor o igual a todos los número en A.

En el siglo XIX se comenzaron a revisar las bases sobre las que estaban construidas las matemáticas, para ver si eran sólidas. Una de las cosas en que se fijaron primero fueron los números, empezando por los números naturales. A partir de los naturales se pueden construir los enteros y a partir de ellos los números racionales. Pero pasar de ahi a los números reales es mucho mas delicado, porque la mayoría de los números reales no son combinaciones de números racionales (por mas raices y operaciones que uno haga con ellos). Los números reales se pueden obtener a partir de una infinidad de números enteros (usando la notación decimal) pero la notación decimal también tiene problemas (¿como hacemos operaciones con decimales infinitos, si no hay donde empezar?)
Una manera de resolver esto es usando el principio del supremo para *definir* los números reales: si cada número real r se puede aproximar tanto como queramos por fracciones menores que r, entonces r es el supremo del conjunto de racionales menores que r.

Así que podemos identificar a cada número real r con un conjunto de racionales Q_r que tiene las siguientes propiedades:

1. Todos los racionales menores que un elemento de Q_r están en Q_r.
2. 2. Q_r no es todo **Q**.

Esto permite definir a los números reales en términos de los números racionales y también permite definir las operaciones de números reales en términos de las operaciones para números racionales, definiendo las operaciones entre esos conjuntos.
Por ejemplo, podemos definir $Q_{r+s} = Q_r + Q_s$ (el conjunto de todas las sumas de elementos de Q_r y Q_s).
Si quisiéramos definir $Q_{r\cdot s} = Q_r \cdot Q_s$ (multiplicamos los conjuntos tomando el conjunto de todos los productos de sus elementos) esto no va a funcionar porque Q_r y Q_s contienen números negativos de valor absolutos muy grandes, y sus productos van a ser números positivos arbitrariamente grandes, así que el conjunto de productos no va a estar acotado superiormente. Esto puede arreglarse para los reales positivos definiendo $Q_{r\cdot s} = (Q_r \cap \mathbf{Q}^+)\cdot(Q_s \cap \mathbf{Q}^+) \cup \mathbf{Q}^-$ (o sea, tomando solo los productos de racionales positivos en Q_r y en Q_r y luego añadiendo todos los racionales negativos)

Es un ejercicio interesante definir el producto de Q_r y Q_s cuando alguno de ellos o los dos no intersectan a $\mathbf{Q}^+$ (o sea cuando alguno representa a un real negativo) y también es interesante hallar los inversos aditivos y multiplicativos de Q_r como conjuntos de racionales.

Problemas

20. ¿Cuales de estos conjuntos están acotados y cuales no? da cotas superiores e inferiores o explica por que no existen

a. $\{ \frac{n+1000}{n} \ / \ n\in\mathbf{N} \}$
b. $\{ (x+1)^2 - x^2 \ / \ x\in\mathbf{R} \}$
c. $\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \ / \ x\in\mathbf{R}^+ \}$ ($\mathbf{R}^+$ es el conjunto de los reales positivos)
d. $\{ x\in\mathbf{R} \ / \ x^3+x^2<1000 \}$
e. $\{ x\in\mathbf{R} \ / \ x^4-x^3<1000 \}$

21. Encuentra el supremo y el ínfimo de estos conjuntos, si es que existen.

a. $\{ {}^{n-1}/_{n+1} \ / \ x\in\mathbf{N} \}$
b. $\{ {}^{x-1}/_{x+1} \ / \ x\in\mathbf{R}^+ \}$
c. $\{ x\in\mathbf{R} \ / \ -1<3x-4<2 \}$
d. $\{ x\in\mathbf{R} \ / \ |x-3|<|x-1| \}$
e. $\{ x\in\mathbf{R} \ / \ x^2<x \}$
f. $\{ x\in\mathbf{Q} \ / \ 3<x^2<5 \}$

22. Usa el *principio del supremo* para demostrar que cada conjunto no vacío de números reales que está está acotado inferiormente tiene un ínfimo.

23. Encuentra el ínfimo.

a. $\{ |x-\sqrt{2}| \ / x\in\mathbf{N} \}$ b. $\{ |{}^1/_x-\sqrt{2}| \ / \ x\in\mathbf{N} \}$ c. $\{ |x-\sqrt{2}| \ / \ x\in\mathbf{Q} \}$

24. Si A y B son dos conjuntos de números reales y definimos

$A+B = \{ a+b \ / \ a\in A \ b\in B \}$ $A\cdot B = \{ a\cdot b \ / \ a\in A \ b\in B \}$ $A^{-1} = \{ a^{-1} \ / \ a\in A \}$

Dados $a_s=\sup A$ $a_i=\operatorname{Inf} A$ $b_s=\sup B$ $b_i=\inf B$ calcula

i. $\sup(A+B)$ iii. $\sup(A\cdot B)$ v. $\sup(A^{-1})$
ii. $\inf(A+B)$ iv. $\inf(A\cdot B)$ vi. $\inf(A^{-1})$

ojo: pueden haber varios casos!